Ayeneh Ma'refat
(The Mirror of Knowledge)
Shahid Beheshti University
Home Page: https://jip.sbu.ac.ir Online ISSN: 2588-512x Print ISSN: 2251-8010

Model-Theoretic Inferentialism; Paraconsistency; Categoricity

Javid Jafari [1] **Davood Hosseini** [2]*

1. Department of Philosophy, Faculty of Humanities, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. (javidjafari@modares.ac.ir)
2. Department of Philosophy, Faculty of Humanities, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. (davood.hosseini@modares.ac.ir)

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 2024/06/08
Revised: 2024/07/17
Accepted:2024/07/22

Cite this article:

Jafari,J., Hosseini,D. (2024). "Model-Theoretic Inferentialism;Paraconsistency; Categoricity". *Ayeneh Marefat*, 24(79),52-68(In Persian).

https://doi.org/10.48308/jipt.2024.235963.1534

ABSTRACT

According to model-theoretic inferentialism (and despite proof-theoretic semantics and model-theoretic semantics), both proof-theoretic and model-theoretic notions play a role in the meaning of logical constants. However, proof-theoretic notions have a more fundamental role compared to model-theoretic notions, so that the semantics and its structure are determined by the proof-theoretic notions. In other words, in proof-theoretic inferentialism, we follow a method by which we can read the semantics from the proof theory. This approach is related to the problem of categoricity and Carnap's non-normal models for proof systems. In this paper we investigate this issue for two paraconsistent logics, mbC and LP. We show that while multi-succedent sequent calculi are categorical for mbC, they are not for LP. That latter has non-normal models. We argue that for the latter we cannot easily read the semantics from the proof theory, except at the cost of distorting the notion of logical consequence.

Keywords: model-theoretic inferentialism, paraconsistency, categoricity

* Corresponding Author Email Address: davood.hosseini@modares.ac.ir
DOI: https://doi.org/10.48308/jipt.2024.235963.1534

Copyright: © 2024 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Extended Abstract

Introduction

There have been two main approaches to explaining the meaning of linguistic expressions: the 'referential' approach and the 'use-theoretic' approach. In the referential approach the concept of 'reference' plays a crucial role, whereas in the use-theoretic approach this role is typically assigned to 'use' or 'inference'. There are good reasons to believe that neither of these two approaches alone can provide a good theory of the meaning of expressions, since each has its shortcomings. We believe that these two theories can, in a sense, complement each other. This is despite the fact that the referential and use-theoretic approaches are often presented as rivals, with acceptance of one implying rejection of the other. The position taken in this paper is a middle ground, according to which both referential and use-theoretic aspects are involved in the meaning of expressions. The main problem with the referential view is that reference can sometimes be indeterminate. We believe, however, that in such cases usage addresses the problem; the role of the 'usage' or 'inference' pattern is to eliminate indeterminacy and specify it uniquely.

We are not seeking a theory of meaning for all linguistic expressions; our discussion focuses on the meaning of logical expressions. Nevertheless, the two approaches mentioned above have also been present in discussions around the meaning of logical operators. We have the "proof-theoretic" approach to logical operators, which falls under the category of use-theoretic approaches. On the other hand, we have the "semantic" or "model-theoretic" approach, which is categorized under referential theories. In the proof-theoretic approach, the "inferential rules" that exist in proof theory are the meaning of logical operators. In contrast, in the semantic theory, the meaning of an expression is identified by semantic truth conditions, which are recursively defined in terms of a set-theoretic structure or a "model." Concepts such as "reference," "truth," and "validity" are key concepts in the semantic approach. Let us give an example. If we consider classical logic, someone who supports the model-theoretic theory of logical operators is likely to say that the meaning of the conjunction operator, for instance, is the function provided by the truth table of conjunction, which means that this function is, in a sense, the referent of the logical conjunction. However, if we ask a proponent of the proof-theoretic approach, they are likely to say that the rules for introduction and elimination of conjunction in a natural deduction system are the meaning of conjunction. As mentioned above, it is often assumed that the referential and use-theoretic approaches are rivals and cannot be combined. The same is assumed here regarding the proof-theoretic approach and the semantic approach. However, a more modest view known as "Model-theoretic Inferentialism" exists, which Garson (2013) has developed and expanded. According to this view, both inferential rules and semantical structures, are involved in the meaning of logical expressions, but inferential rules play a more significant role, as these rules in proof theory must be able to determine the exact structure of semantics.

Discussion

Carnap (1943) shows that inferential model-theoretic approaches face serious problems. He shows that non-normal models for classical logic exist: assignments of truth values 0 and 1 to sentences that satisfy all classical logic inferences, yet these assignments do not adhere to the semantic truth conditions of classical logic. The existence of non-normal models for a deductive system indicates that semantics cannot be simply dictated from its syntax or deductive rules.

Nevertheless, various solutions to this problem have been proposed within the framework of classical logic. One reaction is to strengthen the deductive system. As we mentioned, according to inferential model-theoretic approaches, a deductive system and its rules must be able to specify the semantics or the reference of logical operators. If they cannot do so, it is likely because they are not strong enough. Garson (2013:162) points out that solutions like multi-conclusion calculus can address this issue. Alternatively, Smiley (1996) uses a “bilateral” framework and accepts a deductive system based on dual assertions.

This issue has only been discussed in relation to classical logic. Here, we turn to non-classical (in particular, paraconsistent) logics and show that the existing solutions for classical logic are not effective for paraconsistent logics. Specifically, we examine two logics, LP (Logic of Paradox) and mbC (a basic logic from the Brazilian tradition). For instance, we show that adopting multi-conclusion calculus solves the issue for mbC and allows the semantics of this logic to be read off from its syntax. However, the problem is more difficult for LP. We show that even multi-conclusion calculus leads to a non-normal model for this logic.

Can there be a stronger deductive system than multi-conclusion systems that does not have non-normal models? Trafford (2014) shows that n-sided sequent calculus can solve this issue for LP. However, we argue that adopting n-sided sequent calculus conflicts with the spirit of inferentialism. n-sided sequent calculus lose their connection to our intuitive and everyday concept of inference. For example, in n-sided sequents, the distinction between antecedent and consequent is not very clear, whereas we consider these elements to be crucial in inference. We believe that n-sided sequent calculus involves many semantical loadings, which is a good reason to consider it an unsuitable proof theory. For example, the very definition of n-sided sequent refers to the number of truth values, and thus the definition of validity will no longer be in its conventional form of truth preservation.

Conclusion

Advancing the "Model-Theoretic Inferentialism" program for non-classical logics faces challenges. We have shown that existing solutions for classical logic only partially address the problem for some non-classical logics. Stronger deductive systems like n-sided sequent systems are still not strong enough to exclude non-normal models for LP. However, it seems that multi-valued logic works successfully for non-classical logics based on two-valued assignments. For LP, we examined another solution, which was the use of n-sided sequent systems. This system resolves the categoricity problem for this logic, but whether it is fundamentally a good deductive system and compatible with the spirit of the "inferentialism" remains a contentious issue.

فصلنامه علمی پژوهشی
آینه معرفت
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۵۱۲x شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۱۰ Home Page: https://jip.sbu.ac.ir

استنتاج‌گرایی نظریه - مدلی، فراسازگاری و جازمیت

جاوید جعفری[1] داوود حسینی[2*]

۱.گروه فلسفه، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.(javidjafari@modares.ac.ir)

۲.گروه فلسفه، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.(davood.hosseini@modares.ac.ir)

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقاله پژوهشی

تاریخچه مقاله:
دریافت: ۱۹ / ۰۳ / ۱۴۰۳
بازنگری: ۲۷ / ۰۴ / ۱۴۰۳
پذیرش: ۰۱ / ۰۵ / ۱۴۰۳

استناد به این مقاله:
جعفری، جاوید؛ حسینی، داود. (۱۴۰۳). «استنتاج‌گرایی نظریه- مدلی، فراسازگاری و جازمیت»، *آینه معرفت*، ۲۴(۷۹)، ۶۸-۵۲.
https://doi.org/10.48308/jipt.2024.235963.1534

چکیده

طبق استنتاج‌گرایی نظریه‌ـمدلی، مفاهیم نظریه‌ـبرهانی و سمنتیک نظریه‌ـمدلی هر دو در معنای ثابت‌های منطقی دخیل هستند و برخلاف سمنتیک نظریه‌ـبرهانی مفاهیم نظریه‌ـمدلی انکار نمی‌شوند. با این حال، مفاهیم نظریه‌ـبرهانی نقش اساسی‌تری نسبت به مفاهیم نظریه‌ـمدلی دارند؛ به این ترتیب که قواعد استنتاجی در نظریه برهان هستند که ساختار سمنتیکی را متعین می‌کنند. به عبارت ساده‌تر، در استنتاج‌گرایی نظریه‌ـمدلی ما به دنبال روشی هستیم که بتوان سمنتیک را از طریق قواعد استنتاج بازخوانی کرد. این مسئله ارتباط تنگاتنگی با مسئله جازمیت و وجود مدل‌های غیرنرمال کارنپ برای سیستم‌های استنتاجی دارد. ما این مسئله را برای دو منطق فراسازگار mbC و LP بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگرچه حساب رشته چندنتیجه‌ای برای mbC جازم است، اما این سیستم استنتاجی برای LP جازم نیست و مدل‌های غیرنرمال همچنان برای آن وجود خواهند داشت. استدلال می‌کنیم که نمی‌توان سمنتیک این منطق را به سادگی از نحو آن بازخوانی کرد، مگر با فاصله گرفتن از مفهوم متعارف استنتاج.

کلید واژه‌ها: استنتاج‌گرایی نظریه - مدلی، فراسازگاری، جازمیت.

* رایانامه نویسنده مسئول: davood.hosseini@modares.ac.ir
شناسه دیجیتال مقاله: https://doi.org/10.48308/jipt.2024.235963.1534

Copyright: © 2024 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

مقدمه: استنتاج‌گرایی نظریه ــ مدلی و منطق کلاسیک

به طور کلی دو رویکرد عمده در باره معنای ثابت‌های منطقی وجود داشته است؛ رویکرد نظریه‌ـبرهانی و رویکرد نظریه‌ـمدلی. فرض کنید ♘ یک ثابت منطقی در یک منطق مشخص باشد. در رویکرد نظریه‌ـبرهانی، قواعد نحوی کاربرد این ثابت هستند که معنا را مشخص می‌کنند. به عبارتی دیگر، معنای ♘ همان قواعد کاربرد این عبارت است. برای مثال اگر S یک سیستم استنتاجی مانند استنتاج طبیعی برای یک منطق حاوی این ثابت باشد، معنای این ثابت می‌تواند قواعد معرفی و حذف ♘ در این سیستم استنتاجی باشند. یا اگر S یک سیستم حساب رشته باشد، قواعد راست و چپ رشته‌ها هستند که معنای آن را برمی‌سازند (البته نه لزوما تنها این قواعد، ممکن است قواعد ساختاری یا قواعد عملگرهای دیگر هم دخیل باشند).

رویکرد نظریه‌ـ برهانی با استنتاج‌گرایی، که یک برنامه بزرگ‌تر در مورد نظریه معنای عبارات زبان است، همخوانی زیادی دارد. در استنتاج‌گرایی، نقش‌های استنتاجی عبارات در زبان هستند که معنای آن عبارت را برمی‌سازند. مثال مورد علاقه استنتاج‌گرایان بازی شطرنج است؛ در بازی شطرنج چه چیزی باعث می‌شود ما یک مهره را اسب بنامیم؟ جنس و شکل مهره اسب؟ بی‌شک این ویژگی‌ها نمی‌توانند در معنای اسب بودن در بازی شطرنج دخیل باشند، این نقش مهره اسب است که مشخص می‌کند آن مهره اسب باشد. نقش اسب بودن در قواعد بازی شطرنج و در ارتباط با سایر قواعد حاکم بر مهره‌ها معنی پیدا می‌کند.

اگر α یک عبارت زبانی باشد (یک جمله، یک محمول، یک نام، یا ...) معنای آن توسط نقش استنتاجی و کاربرد آن در زبان مشخص می‌شود. برای مثال، فرض کنید که α یک نام باشد، معنای آن می‌تواند تمام شرایط و اوضاعی باشد که ما این نام را در آن اوضاع و شرایط به کار می‌بریم. اگر یک جمله باشد، طبق یکی از خوانش‌ها (Peregrin, 2014:50)، معنای α توسط تمام جملاتی مشخص می‌شود که می‌توان از α استنتاج کرد و تمام جملاتی که می‌توان از آنها α را استنتاج کرد.

در مقابل تلقی استنتاج‌گرایانه از معنای عبارات، تلقی *بازنمایشی* یا *مدلول‌گرایانه* (Referentialistic) وجود دارد که بر اساس آن، یک عبارت زبانی وقتی معنادار است که به نحوی چیزی در ازای آن در جهان (یا ذهن یا ...) وجود داشته باشد. برای مثال، اگر α یک نام باشد، باید حتماً در جهان (یا ذهن یا ...) مدلولی داشته باشد. یا اگر α یک جمله باشد، بسته به این که کدام نظریه مشخص از طیف نظریات بازنمایشی را اخذ کرده باشیم، پاسخ‌ها ممکن است متعدد باشند. به عنوان مثال، طبق یک دیدگاه فرگه‌ای، معنای این جمله می‌تواند *اندیشه* (thought) آن باشد (Moris and Preti, 2023:162) یا براساس یک رویکرد لوئیسی، می‌تواند مجموعه همه جهان‌های ممکنی باشد که جمله α در آنها صادق است (Loux, 1997:164).

این تلقی از معنا با رویکرد نظریه‌ـ مدلی (یا دقیق‌تر بگوییم، سمنتیک نظریه‌ـمدلی) به ادوات منطقی همخوانی و قرابت‌های زیادی دارد. در رویکرد نظریه‌ـمدلی به ادوات منطقی، معنای ادوات معمولاً به صورت شرایط صدق روی یک مدل تعریف می‌شوند. مدل معمولاً یک ساختار نظریه‌ـمجموعه‌ای است. برای مثال فرض کنید ثابت ♘ فصل منطقی در منطق کلاسیک باشد، آنگاه معنای این ثابت می‌تواند تابعی باشد که فصل را تعبیر می‌کند، یا به عبارت دیگر، همان جدول صدق ثابت فصل. پس تا اینجا، طبق آنچه گفته شده، دو پیوند طبیعی وجود دارد: اول، پیوند بین استنتاج‌گرایی و تلقی نظریه‌ـبرهانی از ثابت‌ها و دوم، پیوند بین رویکرد بازنمایشی معنا و سمنتیک نظریه‌ـمدلی.

گارسن (Garson, 2013: 5) معتقد است که این پیوند بین استنتاج‌گرایی و نظریه برهان، لزوماً نشان دهنده پیوندی

اجتناب‌ناپذیر بین استنتاج‌گرایی و سمنتیک نظریه‌ـ برهانی (Proof-Theoretic Semantics) نیست. به طور سنتی در سمنتیک نظریه‌ـبرهانی، معانی عبارات به کلی با مفاهیم نظریه‌ـبرهانی مانند *قواعد استنتاجی، برهان، و نقش استنتاجی* که همه ماهیت نحوی دارند تعریف می‌شوند و از مفاهیم کلیدی در نظریه مدل، مانند *مدل، صدق، اعتبار، و ارضاپذیری* اکیداً اجتناب می‌شود. گارسن معتقد است که این اجتناب غیر ضروری است؛ یک استنتاج‌گرا می‌تواند همچنان معتقد باشد که قواعد استنتاجی در معین کردن معنا نقش اساسی دارند بدون این که مفاهیم نظریه‌ـمدلی مانند مدل و صدق را به کلی انکار کند. در واقع، می‌توان چنین مفاهیمی را در چارچوب مفهومی مقبول خود نگه داشت و استنتاج‌گرا باقی ماند.

به نظر می‌رسد که پذیرش اینکه مفاهیمی مانند صدق، اعتبار، و مدل در معنای عملگرهای منطقی دخیل هستند به تنهایی چیزی در مورد اینکه شرایط صدق عملگرها چگونه هستند به ما نمی‌گوید. برای پاسخ به این پرسش که شرایط صدق سمنتیکی جمله شرطی چگونه است، آیا می‌توان از قواعد استنتاج کمک گرفت؟ نقش استنتاج‌گرایی در پاسخ به این پرسش پررنگ می‌شود. ممکن است وسوسه شویم و تصور کنیم که اگر قضیه صحت(soundness) و تمامیت(completeness) بین یک سیستم استنتاجی و یک سمنتیک نظریه‌ـمدلی داشته باشیم، بتوانیم شرایط صدق سمنتیکی ثابت‌ها را به نحو یکتایی از قواعد استنتاجی بازخوانی کنیم. ولی این تصور اشتباه است.

پرسش اساسی این است: آیا می توان شرایط صدق سمنتیکی عملگرها را از قواعد استنتاج بازخواند؟ کار کارنپ در (Carnap, 1943) را می‌توان پاسخی منفی به این پرسش تلقی کرد. اگرچه کارنپ به معنای دقیق کلمه استنتاج‌گرا نبود، اما متوجه شده بود که شکافی بین نحو و سمنتیک منطق کلاسیک وجود دارد. فرض کنید که S یک سیستم استنتاجی برای منطق کلاسیک باشد، و C(S) تمام استنتاج‌هایی به شکل $\Gamma \vdash \alpha$ باشد که S می‌تواند آن را اثبات کند. طبق قضیه تمامیت می‌توانیم بگوییم C(S) تمام استنتاج‌های معتبر منطق کلاسیک است، بنابراین تمام قواعد منطق کلاسیک باید در این مجموعه وجود داشته باشد. فرض کنید هیچ‌کدام از شرایط صدق ثابت‌های منطقی متداول را نمی‌دانیم. آیا با داشتن تمام قواعد معتبر منطق کلاسیک، و تعریف ارضا (می‌گوییم یک ارزشدهی یک استنتاج را ارضا می‌کند هرگاه اگر مقدمات آن تحت آن ارزشدهی صادق باشند، آنگاه نتیجه هم تحت آن صادق باشد) و اعتبار (اینکه همه ارزش‌دهی‌ها استنتاج را ارضا کنند)، می‌توان این شرایط صدق را به دست آورد؟ فرض کنید یک ارزش‌دهی دل‌خواه باشد که تمام استنتاج های منطق کلاسیک را ارضا سازد، ما انتظار داریم با مشاهده رفتار این ارزش‌دهی، شرایط صدق ثابت را بتوانیم بفهمیم. اما کارنپ نشان داد که این کار ممکن نیست. برای مثال، ارزش‌دهی v را چنان در نظر بگیرید که به تمام جملات زبان ارزش صدق ۱ نسبت می‌دهد، این ارزشدهی را *بدیهی* (trivial) می‌نامیم. به‌راحتی می‌توان دید که تمام استنتاج‌های ممکن (حتی استنتاج‌های نامعتبر) در نسبت به این ارزش‌دهی ارضاپذیرند، از جمله تمام استنتاج هایی که در C(S) هستند. این در حالی است که این تابع از شرایط صدق کلاسیک نقض تخطی می‌کند، چون به همه جملات ارزش ۱ نسبت می دهد، پس همزمان α و $\neg\alpha$ را صادق می‌بیند و یا به تناقض($\alpha \wedge \neg\alpha$) ارزش ۱ نسبت می دهد.

یک ارزش‌دهی *غیربدیهی* $v^{\vdash}$ است که تنها به قضایای منطق کلاسیک ارزش ۱ می‌دهد و به سایر فرمول‌ها ارزش ۰. می‌توان نشان داد $v^{\vdash}$ هر استنتاج به فرم $\Gamma \vdash \alpha$ در C(S) را ارضا می کند: اگر Γ تهی باشد، α قضیه است که طبق تعریف $v^{\vdash}$ آن را صادق می بیند. اگر تهی نباشد و حاوی غیرقضایا باشد، چون $v^{\vdash}$ به آن ارزش ۰ نسبت می‌دهد، کل استنتاج ارضا می‌شود. تنها حالت باقی‌مانده این است که تمامی جملات در Γ قضیه باشند و α قضیه نباشد. اما چنین

حالتی ممکن نیست، چرا که اگر این استنتاج معتبر باشد، طبق تمامیت یک زیرمجموعه متناهی Γ' از Γ وجود دارد که $\Gamma' \vdash \alpha$ نیز معتبر است. چون همه اعضای Γ' قضیه هستند به ازای هر β از آن داریم $\vdash \beta$، چون انتاج منطق کلاسیک متعدی است، با متناهی بار برش می‌توان نتیجه گرفت که $\vdash \alpha$، که این یک تناقض است، چرا که گفتیم α قضیه نیست. این ارزش‌دهی نرمال نیست، چرا که همزمان به یک جمله اتمی و نقیض آن ارزش ۰ نسبت می دهد، پس از شرایط متداول نقض کلاسیک تخطی می‌کند.

چنین توابعی را که از شرایط صدق (حداقل یک) ثابت منطقی تخطی می‌کنند، که تمام استنتاج‌های منطق کلاسیک را ارضا می‌کنند، *مدل غیرنرمال* می‌نامیم.

آیا یافته کارنپ نشان می‌دهد که استنتاج‌گرایی نظریه-مدلی برنامه‌ای شکست خورده است؟ به نظر این طور نمی‌رسد. راه‌حل‌های گوناگونی برای حل مسئله کارنپ ارائه شده است، برای مثال اسمایلی (Smiley, 1996) و وارن (Warren, 2020) یک راه حل *دواظهارگرایانه* (Bilateralism) ارائه داده‌اند. طبق دواظهارگرایی، افزون بر اظهار جملات، که به معنای صادق بودن است، می‌توانیم جملات را نیز انکار بکنیم. این قابلیتی است که ما پیش از آشنایی با نقض هم آن را داریم. به عبارت دیگر، دواظهارگرایان تعریف جدیدی از «اعتبار» ارائه می‌دهند که مبتنی بر دو مفهوم «اظهار» و «انکار» است. در این تعریف، جملاتی که باید اظهار شوند را با α^{+} و آنها را که قرار است انکار شوند را با α^{-} نشان می‌دهیم و آنها را به ترتیب وقوع مثبت و منفی α می‌نامیم. حال، استنتاج $\Gamma \vdash \alpha^{+/-}$ وقتی معتبر است که هر ارزشدهی که به وقوع مثبت فرمول‌ها در Γ ارزش ۱، و به وقوع منفی آنها ارزش ۰ نسبت دهد، به α هم بسته به وقوع مثبت یا منفی آن، ارزش ۱ یا ۰ نسبت دهد.

دواظهارگرایی موضعی است که ممکن است برای همه استنتاج‌گراها پذیرفتنی نباشد، بنابراین نمی‌تواند راه‌حلی قطعی تلقی شود. اگر کسی بخواهد از استنتاج‌گرایی دفاع کند اما متعهد به دواظهارگرایی نباشد با مشکل مواجه خواهد شد. راه‌حل دیگر پذیرش رابطه انتاج چندنتیجه‌ای مانند حساب رشته گنتزن است (Garson, 2013:162). یعنی یک سیستم استنتاجی را بپذیریم که در آن تالی یک استنتاج تنها یک فرمول نباشد، بلکه مجموعه‌ای از فرمول‌ها و قواعد سیستم بین این استنتاج‌های چندنتیجه‌ای باشد. در ادامه راجع به انتاج چندنتیجه‌ای مفصل‌تر بحث خواهیم کرد.

البته رابطه انتاج چندنتیجه‌ای هم می‌تواند مناقشه برانگیز باشد، به نظر نمی‌رسد استنتاج روزمره ما ربط چندانی به رابطه انتاج چندنتیجه‌ای داشته باشد، استدلال‌های معمول ما متشکل از چند مقدمه و تنها یک نتیجه است. پس به یک معنا، انتاج چندنتیجه‌ای یک رابطه مصنوعی و غیرطبیعی است، یک ابزار فنی که از کاربرد روزمره فاصله گرفته است. اشتاینبرگر (Steinberger, 2011) چالش‌های متعددی علیه این انتاج مطرح کرده است، افزون بر غیرطبیعی بودن، مسائل دیگری نیز در ارتباط با آن مطرح شده است، برای مثال می‌گویند که تعبیر فصلی نتیجه در انتاج چند نتیجه‌ای معنای فصل را پیش‌فرض می‌گیرید، در حالی که بر اساس دیدگاه یک دسته از استنتاج‌گراها، قوانین صورت‌بندی شده در سیستم استنتاجی باید معنای فصل را معین کنند، نه اینکه از پیش آن را در معنای خود داشته باشد. با این حال دفاع‌های مهمی نیز از انتاج چندنتیجه‌ای شده و به این مشکلات پاسخ داده شده است، برای مثال بنگرید به (Restall, 2005, Dicher, 2020).

بونای و دیگران (Bonnay et al., 2016) راه‌حل دیگری برای خارج کردن مدل‌های غیرنرمال نیز ارائه کرده‌اند. بر اساس آن، ما باید قید سمنتیکی اصل *ترکیبی بودن* معنا (compositionality) را از پیش بپذیریم. طبق این اصل ارزش صدق اجزای یک جمله به نحو یکتایی ارزش صدق کل جمله را معین می‌کند. چنین قیدهایی اغلب به مذاق

استنتاج‌گرایان خوش نمی‌آید.

یک پرسش جالب این است که این موضع استنتاج‌گرایانه را چقدر می‌توان تعمیم داد؟ برای مثال آیا می‌توان این موضع را در مورد منطق‌های بدیل هم حفظ کرد؟ پاسخ این پرسش از دو جنبه مهم است، نخست اینکه ما می‌دانیم استنتاج‌گرایی به تنهایی ما را مجبور به پذیرش منطق کلاسیک نمی‌کند، پس اگر نتوان این موضع را در خصوص منطق‌های غیرکلاسیک داشت، شاید در اینکه استنتاج‌گرایی به طور کلی موضعی قابل قبول باشد شک کرد. دوم اینکه همان طور که گفته شد، راه‌حل‌های متعدد برای حل این مسئله در منطق کلاسیک وجود دارد، اگر بتوان یکی از راه‌حل‌های بالا را برای منطق‌های غیرکلاسیک تعمیم داد، می‌توانیم بگوییم آن راه‌حل به سایر راه‌حل‌ها ارجحیت دارد و به یک معنا راه‌حل طبیعی‌تری است.

در اینجا ما قصد داریم که موضع استنتاج‌گرایی نظریه‌ـمدلی را برای برخی از منطق‌های فراسازگار بررسی کنیم. چون منطق‌های فراسازگار بسیار متنوعی در ادبیات بحث وجود دارند، انتخاب ما ناچار دل‌بخواه خواهد بود. با این حال، سعی داریم که از دو خانواده کاملاً متفاوت از منطق‌های فراسازگار نماینده‌ای انتخاب کنیم. در ابتدا به منطق mbC که منطق پایه برای یک رده از منطق‌های فراسازگار که با نام LFI ها (Logic of Formal Inconsistency) شناخته می‌شوند، می‌پردازیم. ویژگی مهم این منطق پایه بودن آن برای رده بزرگی از منطق‌های فراسازگار است، یعنی بسیاری از منطق‌های فراسازگار توسیع این منطق به حساب می آیند. برخلاف منطق‌های رایج چندارزشی فراسازگار، این رده با هیچ جبر متناهی ارزشی متعین نمی‌شوند (نسبت به هیچ‌کدام صحت تمامیت و صحت ندارند). سپس به منطق معروف LP گراهام پریست می‌پردازیم. این منطق نیز یکی از مهم‌ترین منطق‌های فراسازگار به‌ویژه با کاردبرهای فلسفی متنوع است. در ابتدا، در رابطه با منطق mbC خواهیم دید که برخی راه‌حل‌های ارائه شده برای منطق کلاسیک، مانند پذیرش اصل ترکیبی بودن معنا، کافی نیست. سپس نشان می‌دهیم که پذیرش رابطه انتاج چندنتیجه‌ای مشکل را برای این منطق حل می‌کند. اما چنان که استدلال می‌کنیم، این راه‌حل قابل تعمیم نیست زیرا مدل‌های غیرنرمال منطق LP حتی با پذیرش انتاج چندنتیجه‌ای هم اجتناب ناپذیرند. در انتها یک راه‌حل دیگر ارائه شده برای LP را بررسی می‌کنیم و از منظری استنتاج‌گرایانه آن را نقد می‌کنیم.

منطق mbC

برای معرفی LFI ها نیاز داریم که زبان منطق کلاسیک را گسترش دهیم و تعریف‌ها را بر اساس این زبان بیاوریم، فرض کنید Σ مجموعه عملگرهای متداول منطق گزاره‌ای کلاسیک است که یک عملگر تک موضعی سازگاری $\circ$ نیز به آن اضافه شده است طوری که هر گاه α یک جمله باشد $\circ\alpha$ هم یک جمله است. سایر جملات این زبان مانند جملات متداول کلاسیک ساخته می‌شوند.

تعریف (۱): mbC یک منطق بر اساس زبان Σ است که با اصول موضوعه و قواعد استنتاجی زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$

$$\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$

$$\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$$

$$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$$

$$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$$

$$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$$
$$\beta \to (\alpha \vee \beta)$$
$$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$$
$$(\alpha \to \beta) \vee \alpha$$
$$[\mathrm{lem}]: \neg\alpha \vee \alpha$$
$$[\mathrm{bc1}]: \circ\, \alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$$

قواعد:

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$$

اثبات به نحو معمول مانند اثبات در سیستم اصل‌موضوعی منطق کلاسیک تعریف می‌شود.

توجه کنید که به جز دو اصل lem و bc1 بقیه اصول، یک اصل بندی از بخش بدون نقض منطق کلاسیک هستند، پس منطق کلاسیک مثبت، پایه منطق mbC و توسیع‌های آن است.

بسیاری از قضایای منطق کلاسیک در این منطق برقرار نیست. برای مثال، قاعده عکس نقیض به صورت زیر در این منطق برقرار نیست:

$$\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$$

این منطق شباهت زیادی به منطق کلاسیک دارد. این منطق و منطق کلاسیک به طرق مختلفی با هم در ارتباط هستند.

قضیه جالبی بین این دو منطق وجود دارد که به Derivability Adjustment Theorem (DAT) معروف است. طبق این قضیه، اگر یک استدلال در منطق کلاسیک درست باشد آنگاه زیرمجموعه‌ای از جملات منطق کلاسیک وجود دارد که اگر عملگر سازگاری ابتدای همه آن جملات قرار گیرند و به مقدمات استدلال اضافه شوند، آن استدلال در mbC برقرار خواهد. در زیر این قضیه را دقیق‌تر بیان می‌کنیم:

تعریف(۲): اگر Δ مجموعه ای از جملات زبان باشد آنگاه $\circ\, \Delta = \{\circ\, \alpha : \alpha \in \Delta\}$.

قضیه (DAT): فرض کنید که τ' یک تابع از جملات منطق کلاسیک به جملات زبان mbC باشد، طوری که فقط نقض کلاسیک $\sim$ را با نقض فراسازگار $\neg$ عوض می‌کند. آنگاه برای هر مجموعه دلخواه $\Gamma \cup \{\varphi\}$ از زبان منطق کلاسیک داریم:

استنتاج $\Gamma \vdash \varphi$ در منطق کلاسیک برقرار است اگر و تنها اگر زیرمجموعه Δ از جملات زبان کلاسیک وجود داشته باشد که $\tau'[\Gamma], \circ\, \Delta \vdash \tau'(\varphi)$ در mbC برقرار باشد (نگاه کنید به قضیه ۲.۴.۷ در (Carnielli et al, 2016)).

اینک به چند استنتاج معتبر در این منطق می‌پردازیم. می‌توان نشان داد که احکام زیر در mbC برقرار هستند:

۱. $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg \circ \alpha$ اما اینطور نیست که $\neg \circ \alpha \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$.

۲. $\circ\, \alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ اما اینطور نیست که $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash \circ\, \alpha$

اگر $\neg \circ \alpha$ را ناسازگاری تعبیر کنیم و $\alpha \wedge \neg\alpha$ را تناقض، آنگاه طبق بخش ۱ در mbC تناقض ناسازگاری را نتیجه می‌دهد و نه بالعکس. طبق بخش ۲، سازگاری عدم تناقض را نتیجه می‌دهد اما نه بالعکس. اگر در بخش ۱ استنتاج دوم

هم درست می‌بود، آنگاه تناقض و ناسازگاری با هم معادل می‌شدند و اگر استنتاج دوم بخش ۲ هم برقرار بود، آنگاه سازگاری و عدم تناقض با هم معادل می‌شدند. بنابراین در این منطق، افزون بر اینکه مانند همه منطق‌های فراسازگار، مفهوم بی‌مایگی (triviality) و ناسازگاری معادل هم نیستند، تناقض و ناسازگاری از طرفی، و اصل عدم تناقض (یعنی $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$) و سازگاری از طرف دیگر با هم معادل نیستند. به عبارتی، می‌توان نشان داد که در این منطق عملگر سازگاری نمی‌تواند تنها به وسیله عملگرهای معمول کلاسیک تعریف شود.

سمنتیک mbC

mbC (برخلاف منطق های سه‌ارزشی فراسازگار مانند LP و مانند منطق شهودی) با هیچ جبر متناهی متعین نمی‌شوند، به این معنی که نسبت به هیچ جبر متناهی صحت و تمامیت ندارند (Carnielli et al, 2016:122). سمنتیکی که برای آن پیشنهاد شده یک نوع سمنتیک مبتنی بر دو ارزش (bi-valuational semantics) است. در آنچه می‌آید فرض می‌کنیم که $W(\Sigma)$ تمام فرمول های زبان Σ باشد.

تعریف(۳): تابع $v: W(\Sigma) \to \{0,1\}$ یک ارزش‌دهی نرمال برای mbC است اگر و تنها اگر شرایط زیر را داشته باشد (موارد ۱ تا ۳ همان شرایط صدق ثوابت کلاسیک هستند):

۱. $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ اگر و تنها اگر $v(\alpha) = 1$ و $v(\beta) = 1$.
۲. $v(\alpha \vee \beta) = 1$ اگر و تنها اگر $v(\alpha) = 1$ یا $v(\beta) = 1$.
۳. $v(\alpha \to \beta) = 1$ اگر و تنها اگر $v(\alpha) = 0$ یا $v(\beta) = 1$.
۴. اگر $v(\neg\alpha) = 0$ آنگاه $v(\alpha) = 1$.
۵. اگر $v(\circ\, \alpha) = 1$ آنگاه $v(\alpha) = 0$ یا $v(\neg\alpha) = 0$.

اینک می‌توانیم استدلال معتبر در mbC را تعریف کنیم: استنتاج $\Gamma \vdash \alpha$ معتبر است هرگاه به ازای هر ارزش‌دهی نرمال برای mbC اگر مقدمات (همه فرمول‌ها درΓ) درست باشند، آنگاه نتیجه (یعنی α) هم درست است. صحت و تمامیت سیستم اصل موضوعی قبل نسبت به این سمنتیک اثبات شده است (Carnielli et al, 2016: 36).

شرایط صدق عطف، فصل و شرط دقیقاً مانند شرایط صدق این عملگرها در منطق کلاسیک هستند. اما شرایط صدق نقض و سازگاری ضعیف‌تر هستند. توجه شود که بر خلاف سایر شروط، در شماره ۴ و ۵ شرایط صدق یک‌طرفه هستند. همچنین در ۵ شرایط صدق سازگاری وابسته به نقض است. بنابراین این سمنتیک به نوعی از اصل ترکیبی بودن تبعیت نمی‌کند، چرا که شرایط صدق یک جمله نه تنها به نحو یکتایی شرایط صدق کل جمله را معین نمی‌سازد (مانند نقض در ۴)، بلکه شرایط صدق جمله حاوی سازگاری نیز صرفاً به شرایط صدق اجزا آن جمله وابسته نیست، بلکه به ارزش نقض آن هم وابسته است.

مدل غیرنرمال

مدل غیرنرمال برای mbC یک ارزشدهی از زبان این منطق است که شرایط ۱ تا ۵ در تعریف را نداشته باشد ولی همه استنتاج های معتبر mbC را ارضا کند، بنابراین مدل غیرنرمال بدیهی که در منطق کلاسیک می‌شناسیم، یعنی مدلی که به همه جملات زبان ارزش ۱ را نسبت می‌دهد، یک مدل غیرنرمال برای این منطق هم به حساب می‌آید، چرا که شرط ۵ برای آن برقرار نیست (مقدم شرط صادق ولی تالی آن کاذب است). مدل غیربدیهی منطق کلاسیک که در بالا

با $v^{\vdash}$ نشان دادیم را اگر برای فرمول‌های این منطق تعریف کنیم هم یک مدل غیرنرمال است. با همان استدلال می‌توان دید این ارزش‌دهی همه استنتاج های این منطق را ارضا می‌کند، با این حال از شرط شماره ۴ تبعیت نمی‌کند (چرا که به گزاره اتمی p و $\neg p$ ارزش ۰ نسبت می دهد). پس رابطه انتاج این منطق نیز مانند منطق کلاسیک مدل‌های غیرنرمال دارد.

یک راه حل برای اجتناب از مدل‌های غیرنرمال در منطق کلاسیک پذیرش اصل ترکیبی بودن است، یعنی تنها مدل‌هایی را بپذیریم که ترکیبی باشند. اما چنان که در بالا توضیح دادیم، سمنتیک این منطق اصولاً ترکیبی نیست، بنابراین نمی‌توانیم از اصل ترکیبی بودن استفاده کنیم. پذیرش اصل ترکیبی بودن معادل نپذیرفتن سمنتیک مبتنی بر ارزش به عنوان سمنتیک برای این منطق خواهد بود.

راه حل دیگری که می‌توانیم به آن امیدوار باشیم، استفاده از انتاج چندنتیجه‌ای است. انتاج چندنتیجه‌ای برای سمنتیک mbC قابل تعریف است، یعنی بدون داشتن سیستم استنتاجی چندنتیجه‌ای، ما می‌توانیم تمام استدلال‌های معتبر چندنتیجه‌ای $\Gamma \Rightarrow \Gamma'$ را به نحو سمنتیکی تعریف کنیم: این استنتاج در mbC معتبر است اگر و تنها اگر هر ارزش‌دهی mbC یا حداقل به یکی از مقدم‌ها ارزش ۰ یا حداقل به یکی از تالی‌ها ارزش ۱ نسبت دهد. با این حال، این تعریف ممکن است از نظر استنتاج‌گرایان مناقشه‌برانگیز باشد.

خوشبختانه، این نگرانی برطرف شدنی است. آورن (Avron et al, 2018:244) یک سیستم حساب رشته‌ای چندنتیجه‌ای برای این منطق ارائه داده است که مختصراً آن را معرفی می‌کنیم. در زیر، بخش مثبت حساب رشته گنتزن، معروف به LK را برای منطق کلاسیک معرفی می‌کنیم. در بخش‌های بعدی برای معرفی منطق‌های فراسازگار از این سیستم استفاده خواهیم کرد.

از این به بعد، انتاج منطقی هر حساب رشته‌ای چندنتیجه‌ای را با $\Rightarrow$ نشان می‌دهیم. Γ و Δ در صورت‌بندی هر کدام از منطق‌ها، مجموعه‌ای از جملات زبان آن منطق هستند، بنابراین جابجایی و تکرار در آنها مجاز است.

تعریف(۴): سیستم استنتاجی متشکل از قواعد استنتاجی زیر را +LK می‌گوییم:

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow, \Delta}[\wedge\Rightarrow] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}[\Rightarrow\wedge]$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta, \Delta}[\Rightarrow\vee] \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta}[\vee\Rightarrow]$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta, \Delta}[\Rightarrow\to] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \to \beta \Rightarrow \Delta}[\to\Rightarrow]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}[W] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma', \alpha \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}[\mathrm{Cut}]$$

تعریف(۵): قواعد استنتاجی چندنتیجه‌ای +LK به همراه قواعد زیر را حساب رشته GmbC می‌گوییم.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \Delta}[\Rightarrow \neg] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \Delta}{\Gamma, \circ\, \alpha \Rightarrow \Delta}[\circ\Rightarrow]$$

تعریف ارضا برای استنتاج‌های چندنتیجه‌ای کمی متفاوت است، می‌گوییم یک ارزشدهی استنتاج $\Gamma \Rightarrow \Gamma'$ را ارضا می‌کند هرگاه که یا به یکی از اعضای Γ ارزش ۰ نسبت دهد یا حداقل به یکی از اعضای Γ' ارزش ۱ نسبت دهد.

تعریف(۱.۵): تابع $v: w(\Sigma) \to \{0,1\}$ یک مدل برای GmbC است، اگر تمام استنتاج‌های آن را ارضا کند.

حالا می توانیم نشان دهیم که GmbC مدل غیرنرمال ندارد و به نحو یکتایی سمنتیک بالا را متعین می سازد. برای این کار از قضایای متداول این سیستم استفاده می‌کنیم، این قضایا تقریبا بدیهی هستند بنابراین از اثبات همه آنها صرف نظر می‌شود و فقط اثبات برخی از آنها را می‌آوریم.

استنتاج $\Rightarrow \neg\alpha, \alpha$:

$$\frac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\Rightarrow \neg\alpha, \alpha}[\Rightarrow \neg]$$

و همچنین $\alpha, \neg\alpha, \circ\, \alpha \Rightarrow$:

$$\frac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha, \neg\alpha, \Rightarrow \alpha}[W] \quad \dfrac{\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}{\alpha, \neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha}[W]}{\alpha, \neg\alpha, \circ\, \alpha \Rightarrow}[\circ\Rightarrow]$$

قضیه(۱): GmbC مدل غیر نرمال ندارد.

اثبات. فرض کنید $v: w(\Sigma) \to \{0,1\}$ یک مدل برای GmbC باشد. باید نشان دهیم که تمام شرایط ۱ تا ۵ در تعریف (۱) برای آن برقرار است:

۱. فرض کنید $v(\alpha \wedge \beta) = 1$، چون $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$ و $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$ قضیه هستند، طبق تعریف اعتبار داریم $v(\alpha) = v(\beta) = 1$. حالا فرض کنید $v(\alpha) = v(\beta) = 1$، آنگاه $\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$ نتیجه می‌دهد $v(\alpha \wedge \beta) = 1$.

۲. فرض کنید $v(\alpha \vee \beta) = 1$، چون $\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha, \beta$ قضیه است، داریم $v(\alpha) = 1$ یا $v(\beta) = 1$. برعکس، فرض کنید $v(\alpha) = 1$ یا $v(\beta) = 1$، چون $\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$ و $\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$ قضیه هستند در هر صورت داریم $v(\alpha \vee \beta) = 1$.

۳. فرض کنید $v(\alpha \to \beta) = 1$ و $v(\alpha) = 1$، از $\alpha \to \beta, \alpha \Rightarrow \beta$ نتیجه می شود $v(\beta) = 1$. حالا فرض کنید $v(\alpha) = 0$ یا $v(\beta) = 1$، در حالت اول از $\Rightarrow \alpha \to \beta, \alpha$ نتیجه می شود $v(\alpha \to \beta) = 1$. در حالت دوم از $\beta \Rightarrow \alpha \to \beta$ نتیجه می شود $v(\alpha \to \beta) = 1$.

۴. چون $\Rightarrow \alpha, \neg\alpha$ قضیه است داریم $v(\alpha) = 1$ یا $v(\neg\alpha) = 1$.

۵. چون $\alpha, \neg\alpha, \circ\, \alpha \Rightarrow$ قضیه است، اگر $v(\circ\, \alpha) = 1$ باشد آنگاه حداقل یکی دیگر از دو مقدمات باید صادق باشند، پس یا $v(\neg\alpha) = 0$ یا $v(\alpha) = 0$.

منطق LP

منطق LP یکی از معروف‌ترین منطق‌ها در فضای منطق‌های فراسازگار است که توسط پریست (Priest, 1979) معرفی شده است. زبان این منطق برخلاف mbC همان منطق کلاسیک است. ابتدا به نحو سمنتیکی این منطق را معرفی می‌کنیم و سپس به حساب رشته چندنتیجه‌ای آن می‌پردازیم. در اینجا فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ زبان منطق کلاسیک است و

$w(\mathcal{L})$ تمام فرمول‌های این زبان است.

تعریف(۶): LP یک منطق سه‌ارزشی در زبان منطق کلاسیک است که هر کدام از عملگرهای منطقی به صورت زیر تعبیر می‌شوند. ارزش‌های t و T ارزش‌های برگزیده هستند که مجموعه آنها را با D نشان می‌دهیم.

∨	t	f	T
t	t	t	t
f	t	f	T
T	t	T	T

∧	t	f	T
t	t	f	T
f	f	f	f
T	T	f	T

¬	
t	f
f	t
T	T

عملگر شرط به صورت $\alpha \to \beta := \neg\alpha \vee \beta$ تعریف می‌شود.

تعریف(۱.۶): تابع $v: w(\mathcal{L}) \to \{t, f, T\}$ یک *ارزش‌دهی نرمال* (برای LP) است اگر به شرایط صدق جدول بالا احترام بگذارد.

پس طبق تعریف بالا هر ارزش‌دهی یک ارزش‌دهی نرمال نیست، برای مثال اگر $v(\alpha) = t$ و $v(\neg\alpha) = T$ باشد، v یک ارزش‌دهی نرمال نیست، چرا که به شرایط نقض جدول بالا احترام نمی‌گذارد.

یک ارزش‌دهی LP مانند v استنتاج $\Gamma \vdash \alpha$ را وقتی *ارضا می‌کند* که اگر به α ارزشی در D نسبت بدهد یا حداقل به یک جمله در Γ ارزش f نسبت بدهد. این استنتاج وقتی معتبر است که توسط هر ارزش‌دهی نرمال LP ارضا شود.

تعریف (۲.۶): اگر v یک ارزش‌دهی باشد که همه استنتاج‌های معتبر LP را ارضا کند ولی ارزش‌دهی نرمال LP نباشد، آن را یک مدل *غیرنرمال برای LP* می‌نامیم.

در اینجا نیز چنانچه در بخش قبل در خصوص mbC گفتیم می‌توانیم انتاج چندنتیجه‌ای LP را به نحو سمنتیکی تعریف کنیم، اما آنچه از منظر استنتاج‌گرایانه مهم است داشتن یک سیستم استنتاجی نظریه‌برهانی است. اَورن (Avron et al, 2018:124) یک حساب رشته چندنتیجه‌ای برای این منطق نیز ارائه داده است که آن را معرفی میکنیم.

تعریف(۷): قواعد استنتاجی چندنتیجه‌ای +LK بدون عملگر شرط، به همراه قواعد زیر را حساب رشته GLP می‌گوییم.

$$\Rightarrow \neg\alpha, \alpha$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\alpha, \Delta}[\Rightarrow \neg\neg] \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Delta}[\neg\neg\Rightarrow]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \neg\beta, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta), \Delta}[\Rightarrow \neg \wedge] \qquad \frac{\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Delta}[\neg \wedge\Rightarrow]$$

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow, \Delta}[\neg \vee\Rightarrow] \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}[\Rightarrow \neg \vee]$$

یکی از ویژگی‌های مهم LP این است که دقیقاً تمام قضایای منطق کلاسیک را داراست، به عبارتی، می‌توان نشان داد که جمله α قضیه LP است اگر و تنها اگر α قضیه منطق کلاسیک باشد. توجه داشته باشید که زبان LP برخلاف زبان mbC دقیقاً مشابه زبان منطق کلاسیک است، بنابراین چنین حکمی برای mbC بدون قید و شرط قابل بیان نیست، اما با قیدهایی مانند آنچه در مورد قضیه DAT گفتیم، ارتباط منطق کلاسیک با mbC را به نحو معناداری می‌توان حفظ کرد.

یکی از نتایج به نظر تناقض‌آمیز این قضیه آن است که اصل عدم تناقض در منطق LP قضیه است. توجه داشته باشید که اگرچه LP تمام قضایای منطق کلاسیک را داراست، اما تمام استنتاج‌های معتبر منطق کلاسیک را ندارد، برای مثال می‌توان به‌سادگی دید که قاعده وضع مقدم $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \beta$ یا قیاس انفصالی $\alpha, \neg\alpha \vee \beta \Rightarrow \beta$ در LP برقرار نیست. ویژگی مهم دیگر این است که فراقضیه استنتاج برای این شرطی برقرار نیست، در حالی که برای شرطی در mbC برقرار است (Carnielli et al, 2016:32).

مدل غیرنرمال

پرسشی که اکنون مطرح می‌شود این است که آیا انتاج چندنتیجه‌ای برای LP هم می‌تواند به نحو یکتایی سمنتیک آن را معین سازد؟ پاسخ منفی است. به‌رغم موفقیت نسبی این انتاج، خواهیم دید که در فضای سه‌ارزشی، حتی انتاج چندنتیجه‌ای هم با شکست مواجه می‌شود.

قضیه(۲): GLP مدل غیرنرمال دارد.

اثبات. فرض کنید که u یک ارزش‌دهی LP باشد که به دو گزاره اتمی p_1 و p_2 ارزش T نسبت دهد، یعنی $u(p_1) = T$ و $u(p_2) = T$. تابع $v: w(\mathcal{L}) \rightarrow \{t, f, T\}$ را این گونه تعریف می‌کنیم: به ازای هر جمله اتمی p، $v(p) = u(p)$ و به ازای هر جمله مرکب α، اگر $u(\alpha) = T$ آنگاه $v(\alpha) = t$ و در غیر این صورت $v(\alpha) = u(\alpha)$. به سادگی می‌توان نشان داد که به ازای هر جمله دلخواه α، $\mathrm{v}(\alpha) \in \mathrm{D}$ اگر و تنها اگر $u(\alpha) \in D$. بنابراین چون u یک ارزش‌دهی LP است هر استنتاج معتبر $\Gamma \Rightarrow \Delta$ را ارضا می‌کند، پس v هم آن را ارضا می‌کند. اما این ارزش‌دهی غیرنرمال است، چرا که طبق جدول بالا داریم $T \wedge T = T$ اما $\mathrm{v}(p_1 \wedge p_2) = t$.

بنابراین بر خلاف منطق کلاسیک و mbC، رابطه انتاج چندنتیجه‌ای برای منطق LP نمی‌تواند به نحو یکتایی شرایط صدق سمنتیکی آن را معین سازد، این رابطه انتاج نسبت به سمنتیک خود مدل غیرنرمال دارد. به عبارت دیگر، صورت‌بندی رابطه انتاج چندنتیجه‌ای LP برخلاف رابطه انتاج چندنتیجه‌ای منطق کلاسیک و mbC نسبت به سمنتیک آن خاصیت جازمیت را ندارد.

حساب رشته چندبعدی و جازمیت LP

آیا قضیه بالا نشان می‌دهد که طرفدار استنتاج‌گرایی نظریه‌مدلی نمی‌تواند از منطق LP دفاع کند؟ یورتلند (Hjortland, 2014) نشان می‌دهد که با داشتن یک موضع *چنداظهارگرایانه* (multilateralism) به عنوان یک موضع استنتاج‌گرایانه، و داشتن حساب رشته چندبعدی (n-sided) می‌توان برای هر منطق n ارزشی سیستم استنتاجی جازم داشت. در چنداظهارگرایی مانند دواظهارگرایی باور بر این است که انکار یک جمله معادل اظهار نقیض آن جمله نیست و افزون بر آن، به طرق گوناگونی می‌توان یک جمله را انکار یا اظهار کرد. برای مثال حالتی از انکار یک جمله

وجود دارد که ضرورتاً اظهار نقیض آن را نتیجه نمی‌دهد. یا حالتی از انکار وجود دارد که در آن می‌توان هم یک جمله و هم نقیض آن را انکار کرد. به عبارت دیگر، کنش‌های گفتاری متنوعی وجود دارند که در چارچوب اظهار و انکار، به معنای کلاسیک آن نمی‌گنجد. جدا از مناقشه‌برانگیز بودن چنداظهارگرایی به عنوان پشتیبان فلسفی این سیستم استنتاجی، خود دستگاه صوری و تعاریف این سیستم هم از منظر استنتاج‌گرایانه مشکلاتی دارد که آن‌ها را بیان می‌کنیم.

در حساب رشته n-بعدی، یک رشته n-بعدی ساختاری مانند زیر است:

$$\Gamma_0 | \dots | \Gamma_n$$

هر کدام از Γ_i ها ارتباط یکتایی با ارزش i-ام منطق n ارزشی مفروض دارد. یک رشته وقتی معتبر است که تابع ارزش‌دهی ما حداقل به یک جمله از یکی از Γ_i ها ارزش i را نسبت دهد. به طور مشخص، ترافورد (Trafford, 2014) یک حساب رشته 3-بعدی برای LP ارائه می‌دهد و نشان می‌دهد که نسبت به سمنتیک آن جازم است.

اما رشته چندبعدی می‌تواند مورد مناقشه باشد. این تعریف از شهود متعارف ما از استنتاج دور است. روشن نیست که دنباله‌ای از مجموعه‌هایی از فرمول‌ها چه ارتباطی با مفهوم استنتاج دارد. در مورد حساب رشته چندنتیجه‌ای اوضاع بهتر است، در حساب رشته، عبارت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یعنی Δ *نتیجه می‌شود* از Γ. پس مفهوم استنتاج در این تعریف هنوز دیده می‌شود، حداقل به یک معنا. اما ارتباط تعریف بالا با استنتاج به هیچ وجه روشن نیست. اگر استنتاج چندنتیجه‌ای استنتاجی است که ارتباط آن با کاربرد روزمره مناقشه برانگیز است، وضع رشته چندبعدی بدتر از آن است. در یک استنتاج ما حداقل انتظار داریم که تعدادی عناصر زبانی *نتیجه* استنتاجی تعدادی عناصر زبانی دیگر باشند، یعنی انتاج باید یک رابطه *دو موضعی* بین اشیا زبانی باشد. اما بسیار بعید به نظر می‌رسد که تعریف بالا ارتباطی با این مفهوم از استنتاج داشته باشد. از طرفی در تعریف اعتبار نیز تغییر مهمی صورت گرفته است. در تعریف اعتبار رشته چندنتیجه‌ای هیچ ارجاعی به n ارزشی بودن منطق وجود ندارد: اعتبار یعنی حفظ ارزش‌های برگزیده. حتی نیاز نیست که بدانیم ارزش‌های برگزیده چند تا هستند یا چه ارتباطی با هم دارند. در حالی که در رشته چندبعدی هر کدام از ارزش‌ها با یک مجموعه از جملات جفت شده‌اند. بنابراین، تعریف اعتبار در حساب رشته چندبعدی بار سمنتیکی بیشتری از تعریف اعتبار در حساب رشته چندنتیجه‌ای دارد. این ارتباط مورد انتقاد است، چرا که بنا بر رویکرد نظریه‌ـبرهانی، مفاهیم سمنتیکی نباید وارد نظریه برهان و سیستم استنتاجی شوند.

پذیرش این سیستم استنتاجی با چنین پیش‌فرض‌های سمنتیکی‌ای چندان فرقی با پذیرش مستقیم خود سمنتیک و مفاهیم نظریه‌ـمدلی آن ندارد. سیستم استنتاجی تنها باید مفهوم *استنتاج* را به طریقی بازنمایی کند و تنها به وسیله این مفهوم که کمترین پیش‌فرض‌ها را در مورد سمنتیک در خود دارد، بتواند مفهوم سمنتیکی را بازخوانی کرد.

توجه به این نکته مهم است که حساب رشته چندبعدی ممکن است از منظر نظریه‌ـبرهانی ویژگی‌های مطلوبی داشته باشد، برای مثال می‌توان سیستمی داشت که تصمیم‌پذیر باشد، قضیه حذف برش برای آن برقرار باشد و بسیاری از ویژگی‌های مهم نظریه‌ـبرهانی دیگر را داشته باشد. به عقیده ما، در استنتاج‌گرایی افزون بر تأکید بر به‌کارگیری مفاهیم نحوی که در سمنتیک نظریه‌ـبرهانی هم رکنی مهم است، به‌کارگیری مفهوم استنتاج و ارتباط آن با تصور رایجی که از آن وجود دارد هم حائز اهمیت است و باید حفظ شود. استدلال‌های بالا نشان می‌دهد که در خصوص حساب چندبعدی چنین چیزی درست نیست.

فاصله گرفتن زیاد از مفهوم رایج استنتاج ممکن است هزینه‌های جدی در بر داشته باشد. برای مثال، چرچ (Church, 1944) یک سمنتیک ۴ ارزشی تعریف می‌کند که دقیقاً قضایای منطق کلاسیک را تولید می‌کند. طبق

قضیه یورتلند در (Hjortland,2014) یک سیستم حساب رشته ۴-بعدی وجود دارد که نسبت به این سمنتیک جازم است. فرض کنید که شخصی ادعا کند که سمنتیک مورد نظر (intended semantics) منطق کلاسیک در واقع این سمنتیک ۴ ارزشی است و نه سمنتیک ۲ ارزشی رایج که می‌شناسیم، چرا که می‌توان آن را از این سیستم استنتاجی، یعنی یک حساب رشته ۴-بعدی بازخوانی کرد. چطور می‌توان باطل بودن چنین ادعایی را نشان داد؟ اگر می‌شود تا این حد از مفهوم روزمره استنتاج فاصله گرفت، به نظر نمی‌رسد بتوان ایرادی به این استدلال وارد دانست.

نتیجه

گفتیم که گارسن معتقد است که استنتاج‌گرایی در مورد معانی ثابت‌های منطقی اجتناب از مفاهیم نظریه‌ـمدلی را الزام نمی‌کند. می‌توان معتقد بود که معانی ثابت‌های منطقی وابسته به مفاهیم نظریه‌ـمدلی هستند اما ساختار آنها به وسیله قواعد استنتاجی حاکم بر عملگرها معین می‌شوند. به عبارت دیگر، سمنتیک ثابت‌ها را می‌توان به نوعی از نحو یا ساختار استنتاجی حاکم بر آنها بازخواند. دیدیم که این مسئله ارتباط خاصی با مسئله جازمیت منطق نسبت به سمنتیک آن دارد. این مسئله را برای دو منطق LP و mbC بررسی کردیم. نشان دادیم برخی راه‌حل‌های ارائه شده برای منطق کلاسیک در مورد این دو منطق راه‌گشا نیستند. دیدیم که انتاج چندنتیجه‌ای برای mbC موفق است اما برای LP با شکست مواجه می‌شود. یک راه‌حل دیگر را برای LP بررسی کردیم، گفتیم که حساب رشته چندبعدی می‌تواند جازمیت را برای این منطق برگرداند، اما به قیمت از دست دادن یا دور شدن از مفهوم متعارف استنتاج.

سپاسگزاری

این پژوهش به صورت مستقل توسط نویسندگان مقاله انجام شده و از هیچ سازمان یا نهادی کمک مالی دریافت نشده است.

References

Avron, A., Arieli, O., & Zamansky, A. (2018). *Theory of Effective Propositional Paraconsistent Logics*. College Publications.

Bonnay, D., & Westerståhl, D. (2016). Compositionality solves Carnap’s problem. *Erkenntnis*, *81*(4), 721-739. doi: 10.1007/s10670-015-9764-8

Carnap, R. (1943). *Formalization of Logic*. Harvard university press.

Carnielli, W. A., & Coniglio, M. E. (2016). *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation* (Vol. 40). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-33205-5

Church, A. 1944. Review of Carnap 1943. *Philosophical Review 53*, 493-98

Dicher, B. (2020). Hopeful Monsters: A Note on Multiple Conclusions. *Erkenntnis*, *85*(1), 77-98. doi: 10.1007/s10670-018-0019-3

Garson, J. W. (2013). *What Logics Mean: From Proof Theory to Model-Theoretic Semantics*. Cambridge University Press.

Hjortland, O. T. (2014). Speech Acts, Categoricity, and the Meanings of Logical Connectives. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *55*(4), 445-467. doi: 10.1215/00294527-2798700

Loux, M. J., & Crisp, T. M. (1997). *Metaphysics: A Contemporary Introduction*. Routledge.

Morris, K., & Preti, C. (Eds.). (2023). *Early Analytic Philosophy: An Inclusive Reader with Commentary*. Bloomsbury Publishing.

Peregrin, J. (2014). *Inferentialism: Why Rules Matter*. Palgrave-Macmillan.

Priest, G. (1979). The Logic of Paradox. *Journal of Philosophical Logic*, *8*(1) 219-241. doi: 10.1007/BF00258428

Restall, G. (2005). Multiple Conclusions. In Petr Hájek, Luis Valdés-Villanueva & Dag Westerstahl (Eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. College Publications.

Smiley, T. (1996). Rejection. *Analysis, 56*(1), 1–9. doi: 10.1111/j.0003- 2638.1996.00001.x.

Steinberger, F. (2011). Why Conclusions Should Remain Single. *Journal of Philosophical Logic*, *40*(3), 333-355. doi: 10.1007/s10992-010-9153-3

Trafford, J. (2014). An Inferentialist Approach to Paraconsistency. *Abstracta, 8*(1), 55-7. doi: 10.24338/abs-2014.227

Warren, J. (2020). *Shadows of Syntax: Revitalizing Logical and Mathematical Conventionalism*. Oxford University Press.